Développement : Divergence de la série des inverses des nombres premiers par la fonction ζ de Riemann

Analyse & Probabilités
Algèbre & Géométrie

Références :
- Pour les Étapes 1 à 6 : [ROM] Rombaldi J., *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*, deobeck, 2017, p344.
- Pour l'Étape 6 : [GX] Gourdon X., *Les maths en tête - Analyse, 2ème **édition***, ellipses, p284.

Pour les leçons :
- 121 : Nombres premiers. Applications.
- 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
- 244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

On ordonne l'ensemble des nombres premiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par ordre croissant.

Théorème 1.

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p_n}$ est divergente.

Preuve : Considérons la fonction $\zeta : s \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ de Riemann. Fixons $s>1$.
On munit $\mathbb{N}^*$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$\mathbb{P}(n)=\frac{1}{\zeta(s)n^s}.$$

⋆ Étape 1 : Montrons que $\mathbb{P}$ est une probabilité.
Déjà, $\mathbb{P}$ est une fonction à valeurs (strictement) positives. De plus :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(n) &= \frac{1}{\zeta(s)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\\ &= 1.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathbb{P} \text{ est une probabilité.}}$$

⋆ Étape 2 : Calculons $\mathbb{P}(p\mathbb{N}^*)$, pour $p\in\mathbb{N}^*$. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(p\mathbb{N}^*) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*}\{kp\}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(kp)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta(s)k^sp^s}\\ &= \frac{1}{p^s}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathbb{P}(p\mathbb{N}^*)=\frac{1}{p^s}.}$$

⋆ Étape 3 : Calculons $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}(\mathbb{N}^*\backslash p_n\mathbb{N}^*)\right)$. Pour $m\in\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}m\in\bigcap_{n=1}^{+\infty}(\mathbb{N}^*\backslash p_n\mathbb{N}^*) &\iff \forall n\in\mathbb{N}^* \quad m\in\mathbb{N}^*\backslash p_n\mathbb{N}^*\\ &\iff \forall n\in\mathbb{N}^* \quad m\in\mathbb{N}^* \text{ et } m\notin p_n\mathbb{N}^*\\ &\iff m=1.\end{aligned}$$

La probabilité recherchée est donc $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(1)$, d'où :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(\mathbb{N}^*\backslash p_n\mathbb{N}^*)\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.}$$

⋆ Étape 4 : Montrons que $(p_k\mathbb{N}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements indépendants. Soit I une partie non vide finie de $\mathbb{N}^*$. Déjà, on a :

$$\bigcap_{k\in I} p_k\mathbb{N}^* = \left(\prod_{k\in I} p_k\right)\mathbb{N}^*. \tag{1}$$

En effet, pour tout $k \in I$, les p_k (pour $k \in I$) sont premiers entre eux (car premiers distincts). En outre, si $m \in p_k\mathbb{N}^*$, les p_k divisent m, donc leur produit divise m, et donc $m \in \left(\prod_{k\in I} p_k\right)\mathbb{N}^*$. Le sens réciproque se voit facilement.

Cela donne (1). Mais alors, grâce à l'Étape 2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} p_k\mathbb{N}^*\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\prod_{k\in I} p_k\right)\mathbb{N}^*\right) \\ &= \frac{1}{\prod_{k\in I} p_k^s} \\ &= \prod_{k\in I} \mathbb{P}(p_k\mathbb{N}^*). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où l'indépendance des événements souhaitée.}}$$

⋆ Étape 5 : Montrons que $\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n^s}} = \zeta(s)$. Pour cela, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \bigcap_{k=1}^{n}(\mathbb{N}^*\backslash p_k\mathbb{N}^*)$. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \frac{1}{\zeta(s)},$$

d'après l'Étape 3 (car $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty}(\mathbb{N}^*\backslash p_n\mathbb{N}^*)$), et donc $\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\mathbb{P}(A_n)}$ (car $\mathbb{P}$ est à valeurs strictement positives). Mais d'après l'Étape 4, $(p_k\mathbb{N}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements indépendants, donc leurs événements contraires le sont aussi. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a en outre :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(\mathbb{N}^*\backslash p_k\mathbb{N}^*)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}(1-\mathbb{P}(p_k\mathbb{N}^*)) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}.}$$

⋆ Étape 6 : On va calculer un équivalent de ζ en 1^+ en faisant une comparaison série intégrale, puis conclure. Soit $s > 1$. La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^s}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc écrire :

$$\frac{1}{(n+1)^s} \leqslant \int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \frac{1}{n^s}.$$

En sommant,

$$\zeta(s) - 1 \leqslant \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}}_{=\frac{1}{s-1}} \leqslant \zeta(s),$$

d'où :

$$\frac{1}{s-1} \leqslant \zeta(s) \leqslant \frac{1}{s-1} + 1.$$

En multipliant par $s-1$ et en faisant tendre s vers 1, on obtient que $\zeta(s) \underset{s \to 1^+}{\sim} \frac{1}{s-1}$.

Pour finir, raisonnons par l'absurde en supposant que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p_n}$ converge.

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{p_n} = 0$, on a $\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_n}$.

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ converge. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}\right) = e^{-\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)}$ qui a ainsi une limite $\ell > 0$ en $+\infty$. Ainsi, pour $s > 1$:

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \lim_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^s}} \\ &\leqslant \lim_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} \\ &\leqslant \ell. \end{aligned}$$

ζ serait donc une fonction majorée sur $]1; +\infty[$, qui est pourtant de limite infinie en 1^+ d'après l'équivalent calculé précédemment, ce qui est absurde.

Cela achève la preuve. □